Ramis MPSI
p57

Classes à gauche dans un groupe. Théorème de Lagrange.

Soit $(G, .)$ un groupe, de neutre noté e.

1) Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans G, compatible à gauche dans G

$\forall (x, x', y) \in G^3 \quad x \mathcal{R} x' \Rightarrow yx \mathcal{R} yx'$

Pour $x \in G$, on note $\bar{x}$ la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

a) Mq $\bar{e}$ est un sous-groupe de G

b) Etablir que $\forall (x, x') \in G \quad (x \mathcal{R} x') \Leftrightarrow x^{-1}x' \in \bar{e}$

Ainsi $\forall x \in G \quad \bar{x} = x\bar{e}$

2) Réciproquement, soient H un sous-groupe de G et $\mathcal{R}_H$ la relation définie dans G par

$\forall (x, x') \in G^2 \quad x \mathcal{R}_H x' \Leftrightarrow x^{-1}x' \in H$.

a) Mq $\mathcal{R}_H$ est une rel. d'équivalence dans G, compatible à gauche avec la loi de G et que H est la classe $\bar{e}$ de e modulo $\mathcal{R}_H$

b) Mq $\forall x \in G$, l'application $y \mapsto xy$ est une bijection de $\bar{e}$ sur $\bar{x}$

3) Théorème de Lagrange.

Montrer que si G est un groupe fini, alors pour tout sous-groupe H de G, $\mathrm{Card}\, H \mid \mathrm{Card}\, G$.

4) Ex a) ds un groupe fini à 24 élts peut-il exister des sous-groupes à 10 élts ?

b) Soient G un groupe, neutre e. H et K sous-groupes finis de G tq $\mathrm{Card}\, H \wedge \mathrm{Card}\, K = 1$.

Mq $H \cap K = \{e\}$

Principe de l'exercice

Ds 1) et 2) on établit que la rela. d'équiv $\mathcal{R}$ de un groupe G est compatible à gauche avec la loi de G ssi $\exists H$ sous-groupe de G tq $\forall (x,x') \in G$ $(x \mathcal{R} x' \Leftrightarrow x^{-1}x' \in H)$

Dans ce cas, on dispose $\forall x \in G$ d'une bijection de H sur la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Démo : 1) a) $\bar{e}$ est un sous-groupe de G

- Non vide : $\bar{e} \neq \emptyset$ car $e \in \bar{e}$
- produit. $(x,y) \in \bar{e}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \mathcal{R} e \\ y \mathcal{R} e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \mathcal{R} e \\ xy \mathcal{R} xe \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \mathcal{R} e \\ xy \mathcal{R} x \end{cases}$

par transitivité $xy \mathcal{R} e \Rightarrow xy \in \bar{e}$

- Inverse : $x \in \bar{e} \Leftrightarrow x \mathcal{R} e \Rightarrow x^{-1}x \mathcal{R} x^{-1}e$

$\Leftrightarrow e \mathcal{R} x^{-1}$

$\Rightarrow x^{-1} \in \bar{e}$

b) . $x \mathcal{R} x' \Rightarrow x^{-1}x \mathcal{R} x^{-1}x' \Leftrightarrow x^{-1}x' \in \bar{e}$

. $x^{-1}x' \in \bar{e} \Leftrightarrow x^{-1}x' \mathcal{R} e \Rightarrow x(x^{-1}x') \mathcal{R} xe$

$\Leftrightarrow x' \mathcal{R} x$

De plus $x \mathcal{R} x' \Leftrightarrow x^{-1}x' \in \bar{e} \Leftrightarrow x' = x\bar{e}$

2) a) $\mathcal{R}_H$ c'est une relation d'équivalence.

- réflexivité

Soit $x \in G$, comme $x^{-1}x = e \in H$, on a $x \mathcal{R}_H x$

- symétrie

$x \mathcal{R}_H x' \Leftrightarrow x^{-1}x' \in H \underset{\text{inverse}}{\Rightarrow} (x^{-1}x')^{-1} = x'^{-1}x \in H$

$\Leftrightarrow x' \mathcal{R}_H x$

- transitivité.
$$\begin{cases} x \, R_H \, x' \\ x' \, R_H \, x'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{-1} x' \in H \\ x'^{-1} x'' \in H \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^{-1} x'' = (x^{-1} x')(x'^{-1} x'') \in H$$
$$\Rightarrow x \, R_H \, x''$$

donc R_H est 1 rel. d'équivalence.

- Montrons que R_H est compatible

Soient $(x, x', y) \in G^3$

$$(yx)^{-1}(yx') = x^{-1}x' \in H$$

$$x \, R_H \, x' \Rightarrow yx \, R_H \, yx'$$

donc R_H est compatible à gauche avec la loi de G

- Rq $H = \bar{e}$

$$x \in H \Leftrightarrow e^{-1} x \in H \Leftrightarrow e \, R_H \, x \Leftrightarrow x \in \bar{e}$$

d'où $H = \bar{e}$

b) Comme $\bar{x} = xH = x\bar{e}$ alors $\forall y \in H$, $xy \in \bar{x}$

Notons $\varphi : \bar{e} \to \bar{x}$
$\quad y \mapsto xy$

- Soit $z \in \bar{x}$, en notant $y = x^{-1} z$, on a $y \in \bar{e}$ et $\varphi(y) = z$

donc φ est surjective.

- Si $(y_1, y_2) \in \bar{e}^2$ tq $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$, alors

$y_1 = x^{-1}(xy_1) = x^{-1}(xy_2) = y_2$ donc φ est injective.

Rq Plus généralement, $\forall (x, x') \in G^2$, l'application $y \mapsto x' x^{-1} y$ est une bijection de $\bar{x}$ sur $\bar{x}'$.

3°) Théorème de Lagrange.

Puisque R_H est 1 relation d'équivalence dans G, alors $G/_{R_H}$ est une partition de G.

donc $\quad \operatorname{Card} G = \sum_{y \in G/R_H} \operatorname{Card}(y)$

De plus les classes modulo R_H ont toutes même cardinal.

d'après 2b) (à cause de l'isomorphisme entre $\bar{e}$ et $\bar{x}$)

donc $\forall y \in G/_{R_H} \quad \operatorname{Card}(y) = \operatorname{Card}(\bar{e}) = \operatorname{Card} H.$

On obtient $\quad \operatorname{Card} G = \operatorname{Card}(G/_{R_H}) \operatorname{Card} H \quad$ Equation aux classes.

et en particulier $\operatorname{Card} H \mid \operatorname{Card} G$.

4 a) 10 ne divise pas 24, donc non

b) $H \cap K$ est un sous-groupe de K et H

d'après le th de Lagrange $\operatorname{Card}(H \cap K) \mid \operatorname{Card} H$

et $\operatorname{Card}(H \cap K) \mid \operatorname{Card} K$

or $\operatorname{Card} H \wedge \operatorname{Card} K = 1$

donc $\operatorname{Card}(H \cap K) = 1$, soit $H \cap K = \{e\}$.