Inégalité triangulaire / Inégalité Cauchy-Schwarz

- Cas d'égalité -

Inégalité triangulaire : (TEU MPSI p 155)

Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ on a $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

avec égalité ssi $\exists\, k \in \mathbb{R}_+$ $z_1 = k z_2$ ou $z_2 = k z_1$

Preuve . Si $z_1 = 0$ évident et égalité aussi car $z_2 = 0 \times z_1 = 0$

. supposons $z_1 \neq 0$ et posons $k = \frac{z_2}{z_1}$

Comme $|z_1| \neq 0$ on peut écrire et simplifier

$$|z_1| \left|1 + \frac{z_2}{z_1}\right| \leq |z_1| \left(1 + \frac{|z_2|}{|z_1|}\right)$$

$$|1 + k| \leq (1 + |k|)$$

Etudions $(1+|k|)^2 - |1+k|^2 = 1 + 2|k| + |k|^2 - (1+k)(1+\bar{k})$

car $|z|^2 = z\bar{z}$

donc $= 1 + 2|k| + |k|^2 - (1 + k + \bar{k} + k\bar{k})$

$= 1 + 2|k| + |k|^2 - 1 - 2\mathrm{Re}(k) - |k|^2$

$= 2(|k| - \mathrm{Re}(k))$

Or $\mathrm{Re}(k) \leq |k|$ donc $|1+k| \leq (1+|k|)$ car croissance de la fonction racine.

On a égalité ssi $|k| = \mathrm{Re}(k)$ donc $k \in \mathbb{R}_+$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ $\left|\sum_{k=0}^{n} z_i\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |z_i|$

On le montre par récurrence

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle , \rangle$ vérifie

1) $\forall (x,y) \in E^2 \quad |\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$
2) Cas d'égalité ssi x et y sont proportionnels

$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad y = \lambda x$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad x = \lambda y$

Avec norme euclidienne $N: \begin{array}{l} E \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \end{array}$

Preuve : si $y \neq 0$, on calcule le discriminant de la fonction polynomiale suivante $P : \lambda \mapsto \langle x+\lambda y \mid x+\lambda y\rangle$

et on remarque que $P(\lambda) \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Pour la proportionnalité, si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $y = \lambda x$ par exemple

$$\langle x,y\rangle^2 = \langle x \mid \lambda x\rangle^2 = \lambda^2 \langle x,x\rangle^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle \langle x,x\rangle$$
$$= \langle y,y\rangle \langle x,x\rangle$$

d'où l'égalité

Réciproquement, $\langle x,y\rangle^2 = \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle$

si $y = 0$, ils sont proportionnels

sinon $\Delta = 0$ $\exists \lambda$ tel que $P(\lambda) = 0$

$$\langle x+\lambda y \mid x+\lambda y\rangle = 0$$

Par déf du produit scalaire $x + \lambda y = 0$ d'où x prop à y