408 : Calcul d'une somme d'une série alternée.

{ Ketrane p260
{ X-ENS A1 p169

1°/ Montrer que $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}\ln^2 p$ cvg

2°/ En déduire la somme $\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

Idée : la série d'étude répond au critère du TSSA

on introduit une suite auxiliaire u_n.

1) On prouve la convergence de cette suite vers une limite ℓ.

2) En remarquant que $t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{2}$ primitive de $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$, décroît à partir d'un certain rang $\Rightarrow$ comparaison série-$\int$

Th Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ CPM et décroissante.

$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$ tq $n_0 \leq p < q$

$$\int_{p+1}^{q+1} f(t)\, dt \leq \sum_{k=p+1}^{q} f(k) \leq \int_{p}^{q} f(t)\, dt \quad \text{(Monier)}$$

$\rightarrow$ cvg de (u_n) car décroissante et minorée

on veut faire apparaître u_N dans la somme partielle $\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

Terme habituel : $\sum (-1)^n a_n = 2\sum a_{2p} - \sum a_n$

Preuve :

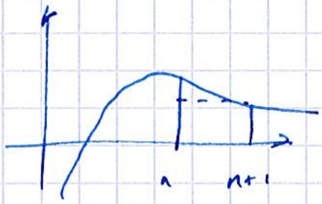
1) Soit $f(t) = \frac{\ln t}{t}$ et $F(t) = \frac{(\ln(t))^2}{2}$ $t \in \mathbb{R}_+^*$

La fonction F est une primitive de f

Or f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(t) = \frac{\frac{1}{t}\times t - \ln(t)\times 1}{t^2}$

$= \frac{1 - \ln t}{t^2} < 0$ pour $t > e$

donc f décroît sur $[3\,;+\infty[$. Comparaison série-intégrale.



$t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$

Pour $n \geq 3$, $t \in [n, n+1]$ $$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{\ln t}{t} \geq \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

donc $$\frac{\ln n}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt \geq \frac{\ln(n+1)}{n+1} \quad (1)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}\left((\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2\right)$$

$$= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt \leq 0 \text{ d'après (1) pour } n \geq 3$$

Comme (u_n) décroît à partir de 3, on a $n \geq 3$

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \geq \sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,dt \geq \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k+1)}{k+1}$$

donc $$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \geq \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\left(\ln^2(n+1) - \ln^2(3)\right)$$

d'où $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \geq \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\left(\ln^2(n+1) - \ln^2(3)\right)$$

donc $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}\ln^2(n) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\left(\ln^2(n+1) - \ln^2(n) - \ln^2(3)\right)$$

or $\ln^2(n+1) - \ln^2(n) \geq 0$

donc $u_n \geq \dfrac{\ln(2)}{2} - \dfrac{1}{2}\ln^2(3)$

(u_n) est décroissante et minorée, elle converge vers une limite ℓ.

2°/ D'après 1°/, la suite de tg $\dfrac{\ln n}{n}$ est décroissante pour $n \geq 3$

de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, d'après le TSSA, la série $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ cv.

③

On peut écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(2n)}{2n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{\ln n}{n}$

$$= 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln 2 + \ln n}{2n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{\ln n}{n}$$

$$= \ln 2\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{\ln n}{n}$$

$$= \ln 2\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right) + u_N - u_{2N} + \frac{1}{2}\ln^2 N - \frac{1}{2}\ln^2(2N)$$

Or $\displaystyle\frac{1}{2}\ln^2 N - \frac{1}{2}\ln^2(2N) = \frac{1}{2}(\ln N - \ln 2N)(\ln N + \ln(2N))$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2\,(\ln 2 + 2\ln N) = -\frac{\ln^2(2)}{2} - \ln 2 \ln N$$

d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)\ln n}{n} = \ln 2\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right) + u_N - u_{2N} - \frac{1}{2}\ln 2\,(\ln 2 + 2\ln N)$

$$= \ln 2\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N}\right) + u_N - u_{2N} - \frac{\ln^2(2)}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 \ln N$$

$$= \ln 2\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N} - \frac{1}{2}\ln N\right) + u_N - u_{2N} - \frac{\ln^2(2)}{2}$$

Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} u_N - u_{2N} = \ell - \ell = 0$ et que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N = \gamma$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{\ln^2(2)}{2}$