Application linéaire et matrice

Soit V un espace vectoriel de dim finie ≥ 1.

$\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ base de V fixée

Soit $x \in V$, notons $x_1, \dots, x_n$ ses composantes dans $\mathcal{B}$

$$x := x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

L'application $x \mapsto (x)_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme de V dans $\mathbb{K}^n$
$= (x_1, \dots, x_n)$

L'isomorphisme réciproque est $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

On identifie $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Ainsi tout $x \in V$, on associe le vecteur colonne $X := {}^t(x)_{\mathcal{B}}$

soit

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

<u>Définition</u> Soit V un espace vectoriel de dim n.

$\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ base de V, $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de V

On appelle matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$
la matrice de type (n, p) définie par :

pour $j = 1 \dots p$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice est formée
des composantes u_j dans la base $\mathcal{B}$.

Cette matrice sera notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$

Si l'on note $a_{i,j}$ les composantes (coefficients) de cette matrice

on a $u_j = a_{1,j} e_1 + \dots + a_{n,j} e_n$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \quad (j = 1 \dots p)$$

Def. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie

$p := \dim E$ et $n := \dim F$

Soit $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_p)$ base de E

$\mathcal{C} := (f_1, \dots, f_n)$ base de F

et $f : E \to F$ application linéaire

On appelle matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ la matrice de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{C}$

Cette matrice est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$. Ses coefficients $a_{i,j}$ sont donc caractérisés par les formules suivantes :

$$f(e_j) = a_{1,j} f_1 + \dots + a_{n,j} f_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i \quad j = 1 \dots p$$

Rq Le nombre de lignes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ est la dimension de l'espace d'arrivée F de f, à savoir $\dim F = n$

Le nombre de colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ est la dimension de l'espace de départ E de f, à savoir $\dim E = p$

Pour tout indice $j \in [\![1, p]\!]$, la j^{e} colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ est formée des composantes du vecteur $f(e_j)$ dans $\mathcal{C}$.

Théorème : Soit $f : E \to F$ une application linéaire et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Soit $x \in E$ et $y = f(x)$

Notons $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ $\quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

les matrices colonnes donnant les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$ et y dans la base $\mathcal{C}$

$$Y = AX$$

Preuve $a_{i,j}$ les coefficients de A. Par définition de X,

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \quad \text{d'où} \quad y = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j) \quad \text{(linéarité)}$$

$$y = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \right) f_i$$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$ la i^{e} composante y_i de y sur la base $\mathcal{C}$

vaut : $\underline{y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j}$

Prop Soient E un espace vectoriel de dim finie p et F de dim n.

L'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension np.

Par exemple, le dual $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ de E est de dim p

Théorème : Soient E, F, G ev de dim finie, de base $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$.

Pour toute application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

Ainsi la composition des applications linéaires se traduit par la multiplication matricielle.

Prop : E, F ev de dimension $n \geq 1$. $\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{C}$ base de F

$f : E \to F$ application linéaire, $A \in M_n(\mathbb{K})$

Alors f est un isomorphisme ssi A est inversible, dans ce cas l'inverse A^{-1} de A est la matrice f^{-1} dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = [\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)]^{-1}$

Pour les endomorphismes, $f : E \to E$, $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathcal{L}(E)$ un anneau (la multiplication est la composition des applications)

Soit la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

$$f(e_j) = a_{1,j} e_1 + \dots + a_{n,j} e_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \quad (j = 1, \dots, n)$$

Un automorphisme est un endomorphisme inversible

Prop : Soit E un espace vectoriel de dim $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ base
L'application de $\mathcal{GL}(E)$ dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ associant à tout $f \in \mathcal{GL}(E)$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de groupe

Changement de bases

E espace vectoriel de dim finie. $\mathcal{B} := (e_1, .. e_p)$ et $\mathcal{B}' := (e_1', .. e_p')$
Tout vecteur $x \in E$ est représenté par 2 vecteurs colonnes X dans la base $\mathcal{B}$ et X' dans la base $\mathcal{B}'$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i' \qquad X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad X' := \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_p' \end{pmatrix}$$

On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice de la famille $(e_1', .. e_p')$ dans la base $\mathcal{B}$. C'est une matrice carrée d'ordre p, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

Soit $P_{i,j}$ les coeff de cette matrice.

$$e_j' = \sum_{i=1}^{n} P_{i,j} e_i \qquad (j = 1 \dots p)$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de l'application identique de E dans E dans les bases $\mathcal{B}'$ au départ et $\mathcal{B}$ à l'arrivée.

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$$

Formule de changement de bases

Soit x vecteur de E, notons X (resp X') le vecteur colonne formé des composantes de x dans l'ancienne base $\mathcal{B}$ (resp dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$) Alors :

$$X = P X' \quad \text{avec } P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

⚠ La matrice P donne $\mathcal{B}'$ en fonction de $\mathcal{B}$.

Démo : $P := (P_{ij})$

$$x = \sum_{j=1}^{p} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{p} x'_j \left(\sum_{i=1}^{p} P_{ij} e_i \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} P_{ij} x'_j \right) e_i$$

Par identification $x_i = \sum_{j=1}^{p} P_{ij} x'_j$ donc

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1,p} \\ \vdots & & \\ P_{p,1} & \cdots & P_{p,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} = PX'$$

Changement de base pour une application linéaire

$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ $\quad A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$ $\quad P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ $\quad Q = Q_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$

alors $A' = Q^{-1}AP$

Déterminants

K est un anneau commutatif.

Déf : Soit A matrice carrée d'ordre $n \geq 1$ de coeff $a_{i,j} \in K$ on appelle déterminant de A

$$\det A = \sum_{s \in \mathfrak{S}(n)} \varepsilon(s)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Dans cette formule pour toute permutation $s \in [\![1,n]\!]$ $\varepsilon(s) \in \{-1,1\}$ est la signature de s

Théorème : Notons $c_1, \dots c_n$ les colonnes de $A \in M_n(K)$. Alors

1) Soit $j \in [\![1,n]\!]$, pour tout $\lambda \in K$, on a

$$\det(c_1, \dots, \lambda c_j, \dots, c_n) = \lambda \det(c_1, \dots, c_j, \dots, c_n)$$

Si c_j est la somme de deux colonnes c' et c''

$$\det A = \det(c_1, \dots, c'_j, \dots, c_n) + \det(c_1, \dots, c''_j, \dots c_n)$$

- Si l'une des colonnes C_j est nulle alors $\det(A)=0$
- Si deux colonnes sont égales alors $\det(A)=0$
- l'échange de deux colonnes de A multiplie le déterminant par -1
- Si l'on effectue une permutation $s \in \mathfrak{S}_n$ sur les colonnes de A

  le déterminant est multiplié par la signature $\varepsilon(s)$ de s

  $\det(C_{\sigma(1)}, \dots C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(s) \det(C_1, \dots C_n)$
- Pour tout $\lambda \in K$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$