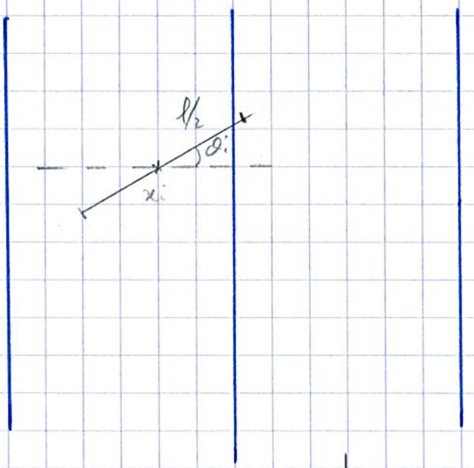
Aiguille de Buffon.

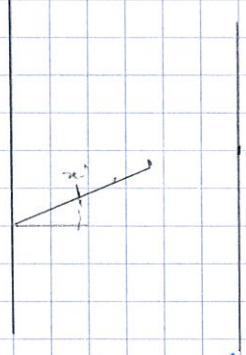
Suivre le Dupont p 201/202 pour la 1re partie puis le Pilko pour la seconde

a) On munit le plan d'un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de sorte que le réseau de droites soit de direction $\vec{j}$.
Pour chaque lancer i, soit le réel $x_i \in [0, L[$ représentant la distance du centre de l'aiguille à la droite la plus proche dans le sens de $\vec{i}$ et le réel $\theta_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donnant l'angle de l'aiguille avec $\vec{i}$.



clair de connaître $\bar{x}_i$, x_i réel L pour donner un sens à l'expérience

Cas extrêmes.



$$d_i = \begin{cases} 1 \text{ si l'aiguille a coupé une droite du réseau au lancer } i. \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

donc $d_i = 1 \iff x_i \in [0, \frac{\ell}{2}\cos(\theta_i)] \cup [L - \frac{\ell}{2}\cos\theta_i ; L]$

x_i, θ_i sont les réalisations des va X_i et Θ_i tq (modélisation)

1) les va. $X_1, \dots X_n, \Theta_1, \dots \Theta_n$ sont indépendantes

2) Les va $X_1, \dots X_n$ suivent une loi uniforme sur $[0, L[$

3) Les va $\Theta_1, \dots \Theta_n$, suivent une loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

D'où d_i est une réalisation de la va D_i définie sur tout i par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad D_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) \in [0, \frac{\ell}{2}\cos\Theta_i] \cup [L - \frac{\ell}{2}\cos\Theta_i, L] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fréquence de l'aiguille touchant une droite est modélisée par

$$F_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$$

$D_i \sim$ Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p = \mathbb{P}(D_i = 1)$

Calculons p ! Les 2 événements sont incompatibles

$$p = \mathbb{P}(X_i \in [0, \tfrac{\ell}{2}\cos\Theta_i] \cup [L - \tfrac{\ell}{2}\cos\Theta_i, L])$$

$$= \mathbb{P}(X_i \in [0, \tfrac{\ell}{2}\cos\Theta_i]) + \mathbb{P}(X_i \in [L - \tfrac{\ell}{2}\cos\Theta_i, L])$$

$$= \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\frac{\ell}{2}\cos\Theta_i} \cancel{\mathbb{1}\dots} \frac{dx}{L}\frac{d\theta}{\pi}}_{\text{loi indep}} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{L-\frac{\ell}{2}\cos\theta}^{L} \frac{dx}{L}\frac{d\theta}{\pi}$$

— cf Pillo p26/27

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$

Symétrie du problème.

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\frac{\ell}{2}\cos\theta} \frac{dx}{L}\frac{d\theta}{\pi} = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\ell}{2}\frac{\cos\theta}{L\pi}\,d\theta$$

$$= \frac{2\ell}{L\pi}$$ d'où loi des grands nombres. $F_n \simeq p$.

b) Convergence en probabilité d'après la loi faible

presque sûrement d'après la loi forte des grands nombres.

(loi faible des grands nombres.

X va admettant une espérance μ et 1 variance σ^2 $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$

$X = (X_i)_{i \geq 1}$ échantillon

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

⑥

Corollaire = Principe fréquentiste

$p \in]0,1[$, $X = (X_i)$ schéma de Bernoulli de paramètre p

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, F_n va qui modélise le succès sur les n premières épreuves.

Alors $\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|F_n - p| \geq \varepsilon) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Loi forte des grands nombres.

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de va converge presque sûrement ou fortement vers une variable aléatoire X si $\mathbb{P}(X_n \xrightarrow[n \to \infty]{} X) = 1$

d'où la loi forte :

X échantillon d'1 loi admettant une espérance μ et une variance, alors la suite des moyennes empiriques $(\overline{X_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ cvg ps vers μ.

<u>Retour à l'exo</u>

Soient $D_1, \dots D_n$ indépendants de loi de Bernoulli $p = \frac{2l}{L\pi}$

D_i modélisant la i^{e} aiguille chevauchant ou non le réseau

$$\overline{D_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_i$$

Variance d'1 loi de Bernoulli : $p(1-p)$

Intervalle de confiance d'une binomiale $IC(1-\alpha)$.

$$\left[p - z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \; ; \; p + z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

pour $\alpha = 5\%$, $z_\alpha = 1{,}96$ / $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ par étude

d'où $IC\left(\overline{D_n} - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{4n}} \; ; \; \overline{D_n} + z_\alpha \sqrt{\frac{1}{4n}}\right)$

d'où $\left[\overline{D_n} - \frac{z_\alpha}{2\sqrt{n}} \; ; \; \overline{D_n} + \frac{z_\alpha}{2\sqrt{n}}\right]$

$E(\overline{X_n}) = p$ et $V(\overline{X_n}) = \frac{p(1-p)}{n}$

Ineg. de B.T appliquée à $\overline{X_n}$ donne pour $\varepsilon > 0$

$$P(|\overline{X_n} - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$$

d'où $P(\overline{X_n} - \varepsilon < p < \overline{X_n} + \varepsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$

donc l'intervalle $]\overline{X_n} - \varepsilon \,;\, \overline{X_n} + \varepsilon[$ contient p avec une proba au moins égale à $1 - \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$

Or $p(1-p) = -p^2 + p = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ donc $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$

on obtient donc la minoration

$$P(\overline{X_n} - \varepsilon < p < \overline{X_n} + \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$$

et si l'on veut que $P(\overline{X_n} - \varepsilon < p < \overline{X_n} + \varepsilon) \geq 1 - \alpha$

il suffit de choisir $\alpha = \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$ soit $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}}$

et alors $P\left(\overline{X_n} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}} < p < \overline{X_n} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}}\right) \geq 1 - \alpha.$