348
172

Développement : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

A diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exp(A)$ diagonalisable

Référence : 1) Gréfone (convergence et commutativité) / Monier Alg TP p 40/43

2) Rombaldi : adapté pour le reste th 23.5 p 751

Corollaire 23.10 p 752

objectif agrégation p 215 ex 4.18

Enoncé Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1) A diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exp(A)$ diagonalisable

2) $\exp(A) = I_n \Leftrightarrow A$ diagonalisable et $Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

quelle dans obj agreg.

1) Lemme. soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$

alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$

il existe une norme d'algèbre ① sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que les séries $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ et $\sum_{k \geq 0} \frac{B^k}{k!}$ soient absolument convergentes.

alors la série produit est absolument convergente et a pour somme $e^A e^B$ et aussi $e^B e^A$. Son terme général est
$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} A^i \frac{1}{(k-i)!} B^{k-i} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$$
$$= \frac{1}{k!}(A+B)^k.$$ (Monier Alg TP p 43)

$\Rightarrow$ A diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(PDP^{-1})^k}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!}\right) P^{-1} = P \exp(D) P^{-1}$$

avec $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_n})$

① Monier p 80 (existence d'une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)

donc $\exp(A)$ est diagonalisable.

$\Leftarrow$ $A \in M_n(\mathbb{C})$. Par la décomposition de Dunford, il existe D et N tel que D diagonalisable et N nilpotente avec

$$\begin{cases} A = N + D \\ ND = DN \end{cases}$$

idée : le but est de démontrer que $N = 0$.

N et D commutent.

$$\exp(A) = \exp(D+N) = \exp(D)\exp(N)$$
$$= \exp(D)\left(I_n + \exp(N) - I_n\right)$$
$$= \exp(D) + \underbrace{\exp(D)\left(\exp(N) - I_n\right)}_{= N'}$$

Montrons que $\exp(A) = \exp(D) + N'$ est la décomposition de Dunford de $\exp(A)$

* D diagonalisable (car diagonale), on a $\exp(D)$ diagonalisable d'après $\Rightarrow$
* $\exp(D)$ commute avec N

  donc commute avec $\exp(N)$ (polynôme en N)

  donc commute avec N'
* N' est nilpotente ?

  soit q l'indice de nilpotence de N. $(q \leq n)$

$$N' = \exp(D)\left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!} - I_n\right)$$
$$= \exp(D)\left(\sum_{k=1}^{q-1} \frac{N^k}{k!}\right) \quad (*)$$
$$= \exp(D)\, N \left(\sum_{k=1}^{q-1} \frac{N^{k-1}}{k!}\right)$$
$$= \exp(D)\, N \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{q-2} \frac{N^k}{(k+1)!}\right)}_{= P(N)}$$

$\exp(D)$, N et $P(N)$ commutent.

$$N'^q = \left(\exp(D)\, N\, P(N)\right)^q = \exp(D)^q N^q P(N)^q$$

or $N^q = 0$ donc $N'^q = 0$ et N' est nilpotente

donc $\exp(A) = \exp(D) + N'$ est la décomposition de Dunford de $\exp(A)$

Comme $\exp(A)$ est diagonalisable, $N' = 0$

Par $(*)$ avec $\exp(D)$ inversible

$$\sum_{k=1}^{q-1} \frac{N^k}{k!} = 0 \quad \text{, ie} \quad P(X) = \sum_{k=1}^{q-1} \frac{X^k}{k!} \text{ est un polynôme}$$

annulateur de N. Or son polynôme minimal est X^q

et $\deg P \leq q-1$ ~~donc $q=1$~~

donc $\underline{N = 0}$.

2) $\Rightarrow$ comme $\exp(A) = I_n$ d'après ce qui précède $\exp(A)$ est donc

A est diagonalisable

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots d_n)$

par suite

$I_n = \exp(A) = P(\exp D)P^{-1}$ avec $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{d_1}, \dots e^{d_n})$

$\Rightarrow d_i \in 2i\pi\mathbb{Z} \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$

$\Leftarrow$ Si A est diagonalisable et ses valeurs propres $d_i \in 2i\pi\mathbb{Z}$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$

alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots d_n)$

$\exp(A) = P \exp(D) P^{-1} = PP^{-1} = I_n$

car $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{d_1}, \dots e^{d_n}) = I_n$.