Page de cours (à recopier)

Chapitre 10 :
Fonctions Linéaires et proportionnalité

Activité

Un cinéma propose trois tarifs aux spectateurs pour la saison :

— Tarif 1 : 8 € l'entrée

— Tarif 2 : 4 € l'entrée avec la carte de réduction qui coûte 40 €

— Tarif 3 : L'abonnement pour la saison qui coûte 92 €

Questions :

1. Calculer pour chaque tarif le prix pour 6 entrées, 11 entrées et 15 entrées (faire un tableau). Dans chaque cas, donner le tarif le plus avantageux.
2. Soit x le nombre d'entrées, Exprimer en fonction de x la dépense pour chaque tarif.
3. Représenter dans un même graphique la dépense en fonction du nombre d'entrées, pour chaque tarif (une couleur différente). Dans quels cas vaut-il mieux choisir un tarif plutôt qu'un autre ?
4. Que pouvez-vous dire du tarif 1 ? Pourquoi ?
5. Que pouvez-vous dire du tarif 3 ?

Correction

Correction de l'activité

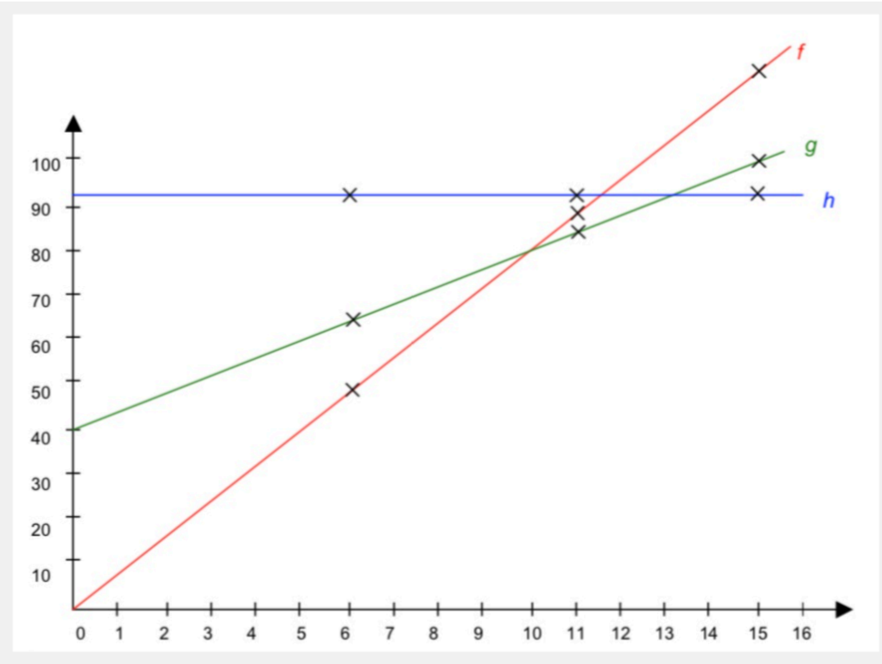
1.

x entrées	$x = 6$	$x = 11$	$x = 15$
Tarif 1	48 €	88 €	120 €
Tarif 2	64 €	84 €	100 €
Tarif 3	92 €	92 €	92 €

2. Soit x le nombre d'entrée. Chaque tarif est exprimé en €.

Pour le tarif 1, le tarif est de $8 \times x = 8x$, on note f cette fonction, $f(x) = 8x$
Pour le tarif2, le tarif est de $4 \times x + 40 = 4x + 40$, on note g cette fonction,
$$g(x) = 4x + 40$$
Pour le tarif 3, le tarif est de 92, on note h cette fonction, $h(x) = 92$

3.



4. Le tarif 1 est un ensemble de points alignés qui forment une droite qui passe par l'origine du repère, c'est donc une situation de proportionnalité.
   C'est une fonction linéaire (que nous allons détailler dans ce chapitre)

5. Pour le tarif 3, à chaque nombre x est associé le nombre 92, c'est une fonction constante

Remarque : que dire du tarif 2, ce n'est pas une situation de proportionnalité car la droite ne passe pas par l'origine du repère. Elle s'écrit $h(x) = 4x + 40$.
Nous verrons dans le chapitre suivant que cette fonction est affine

I Fonction linéaire

A Définition et propriétés

Définition 1. Soit a un nombre relatif donné, la fonction linéaire f de coefficient a est la fonction qui multiplie tout nombre x par le nombre a.
On note $f : x \mapsto ax$ ou $f(x) = ax$.

Exemple 1. Pour chaque fonction, dire si elle est linéaire et si oui, donner son coefficient

1. $f : x \mapsto 3x$?
2. $g : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x$?
3. $f : x \mapsto 2x^2$?
4. $f : x \mapsto -4x + 1$?

Solution de l'exemple 1 à recopier

Exemple 1.

1. $f\colon x \mapsto 3x$ est-elle une fonction linéaire ? Si oui, quel est son coefficient ?

   Solution : f est la fonction linéaire de coefficient 3, elle multiplie le nombre initial par 3.
   Ex : $f(1) = 3\,; f(7) = 21$

2. $g\colon x \mapsto -\dfrac{1}{2}x$?

   Solution : coefficient $-\dfrac{1}{2}$

3. $f\colon x \mapsto 2x^2$?

   Solution : f n'est pas une fonction linéaire car elle calcule le carré du nombre $\xrightarrow[\text{(ne convient pas)}]{}$ initial puis multiplie par 2.

4. $f\colon x \mapsto -4x + 1$?

   Solution : non car on multiplie le nombre initial par -4 et on $\xrightarrow[\text{(ne convient pas)}]{\text{ajoute 1}}$

Page de cours

Propriété 1. *Généralités sur les fonctions linéraires*

$$f(0) = 0$$

Quelques soient les nombres x, y et k, on a

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(k \times x) = k \times f(x)$$

Ne pas copier (lire pour ceux qui veulent comprendre à quoi servent ces propriétés). Pour ceux qui feront des mathématiques plus tard, vous vous rendrez compte ce jour-là comme ces deux propriétés sont importantes ! Et savoir que $f(0) = 0$ est intuitif et simple mais fondamental !

Démonstration

1. Montrons que $f(0) = 0$
   En toute généralité, $f(x) = ax$ avec a un nombre relatif donné. Pour $x = 0$, on a $f(0) = a \times 0 = 0$
2. Montrons que quelques soient x et y, on a la la relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
   Soit $f\colon x \mapsto ax$. Soient x et y deux nombres, on a

$$\begin{array}{rcl} f(x+y) & = & a \times (x+y) \\ f(x+y) & = & a \times x + a \times y \\ f(x+y) & = & f(x) + f(y) \end{array}$$

3. Montrons que quelques soient x et k, on a $f(k \times x) = k \times f(x)$.
   Soit $f(x) = ax$.

$$\begin{array}{rcl} f(k \times x) & = & a \times (k \times x) \\ f(k \times x) & = & a \times k \times x \\ f(k \times x) & = & k \times a \times x \\ f(k \times x) & = & k \times (a \times x) \\ f(k \times x) & = & k \times f(x) \end{array}$$