Nom : **Prénom :** **Classe :**

DEVOIR COMMUN 3^{me}

26 février 2020 - **L'usage de la calculatrice est autorisé.**

▪ EXERCICE 1. /11

Léa pense qu'en multipliant deux nombres impairs consécutifs (c'est-à-dire qui se suivent) et en ajoutant 1, le résultat obtenu est toujours un multiple de 4.

1. 5 et 7 sont des nombres impairs consécutifs. La conjecture de Léa est-elle vérifiée dans ce cas là ?
2. Le tableau ci-dessous montre le travail qu'elle a réalisé dans une feuille de calcul.

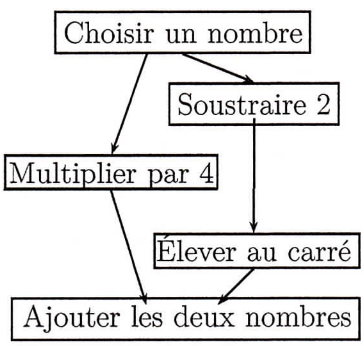
	A	B	C	D	E
1		Nombre impair	Nombre impair suivant	Produit de ces nombres impairs consécutifs	Résultat obtenu
2	x	$2x+1$	$2x+3$	$(2x+1)(2x+3)$	$(2x+1)(2x+3)+1$
3	0	1	3	3	4
4	1	3	5	15	16
5	2	5	7	35	36
6	3	7	9	63	64

   (a) Quelle formule doit-on saisir dans la cellule B3 puis étirer vers le bas afin d'obtenir le x^{ime} nombre impair ?
   (b) Quelle formule doit-on saisir dans la cellule D3 puis étirer vers le bas pour obtenir le produit des deux nombres impairs ?
   (c) Quelle formule doit-on saisir dans la cellule E3 puis étirer vers le bas pour obtenir le résultat demandé par Léa ?
   (d) Compléter la copie d'écran fournie ci-dessus avec les résultats que devrait obtenir Léa.
3. On note x un nombre entier positif. Prouver que Léa a raison, c'est-à-dire que pour tout entier x, $(2x+1)(2x+3)+1$ est un multiple de 4.

▪ EXERCICE 2. /11

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A



PROGRAMME B

- Choisir un nombre
- Calculer son carré
- Ajouter 6 au résultat.

Tournez, SVP !

Corrigé du devoir commun de Février

Exercice 1

1) $5\times 7+1=36$ et $36=9\times 4$

donc 36 est un multiple de 4

Le conjecture est vérifiée pour 5 et 7

2) a) $=A3*+1$

b) $=B3*C3$

c) $=D3+1$

d) voir énoncé

3) $A=(2x+1)(2x+3)+1$

$=4x^2+6x+2x+3+1$

$=4x^2+8x+4$

or $A=4(x^2+2x+4)$

si x est entier alors x^2+2x+4 est entier

et A s'écrit sous la forme $A=4\times k$ avec k entier

A est un multiple de 4

Exercice 2

1) a)

5

$5\times 4=20$ | $5-2=3$

$3^2=9$

$20+9=29$

On obtient 29 à partir de 5

b) $5\to 5^2=25\to 25+6=31$

on obtient 31 à partir de 5.

2)

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
4x \arrow[ddr] & & x-2 \arrow[d] \\
 & & (x-2)^2 \arrow[dl] \\
 & 4x+(x-2)^2 &
\end{tikzcd}$$

Le programme s'écrit donc sous la forme $A = 4x + (x-2)^2$

$A = 4x + x^2 - 4x + 4$ (identité remarquable)

$= x^2 + 4$

3) $x \longrightarrow x^2 \longrightarrow x^2+6$

Le programme donne le résultat x^2+6

4) a) $x^2 + 6 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 6 = \frac{4}{9} + 6 = \frac{4}{9} + \frac{54}{9} = \frac{58}{9}$ Vrai

b) Si x est entier, prenons $x = 2$ alors le résultat du programme B est $x^2+6 = 2^2+6 = 10$

et 10 est pair. donc c'est faux

c) Si $x>0$ alors $x^2+6>0$

Si $x<0$ alors $x^2+6>0$ car le produit de deux nombres négatifs est positif.

On obtient donc toujours un nombre positif Vrai

d) (Bonus) si $x = 2k$ avec k entier

$A = (2k)^2 + 4 = 4k^2 + 4 = 2(2k^2+2)$

et $2k^2+2$ est entier, donc A s'écrit sous la forme $2 \times k'$, c'est un nombre pair

$B = (2k)^2 + 6 = 4k^2 + 6 = 2(2k^2+3)$

avec $k'' = 2k^2+3$ un entier

$B = 2k''$, c'est un nombre pair.

donc si x est pair, le résultat des deux programmes est pair.

Si $x = 2k+1$ alors $C = (2k+1)^2 + 4 = 4k^2 + 4k + 1 + 4$

$$= 2(k^2 + 2k + 2) + 1$$

posons $p = k^2 + 2k + 2$ qui est entier

C s'écrit sous la forme $C = 2p + 1$ qui est un nombre impair

$D = (2k+1)^2 + 6 = 4k^2 + 4k + 1 + 6$

$$= 2(k^2 + 2k + 3) + 1$$

posons $m = k^2 + 2k + 3$ qui est entier

D s'écrit sous la forme $D = 2m + 1$ qui est impair

donc si x est impair, le résultat des deux programmes est impair.

Exercice 3

Le triangle DCE est une homothétie du triangle ABC de centre C et de rapport $-2,5$

donc le triangle DCE est un agrandissement de ABC de rapport 2,5

• [DE] est l'image de [AB] par l'homothétie de centre C.

donc $DE = AB \times (-k)$

$= 300 \times 2,5$

$DE = 750$ m

• Calcul de [BC]

Le triangle ABC est un triangle rectangle en A

d'après le théorème de Pythagore

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 300^2 + 400^2$

$= 250000$

BC est une longueur, donc $BC > 0$

$\underline{BC} = \sqrt{250000} = \underline{500 \text{ m}}$

. [CD] est l'image de [BC] par l'homothétie de centre C

donc $\underline{CD} = 500 \times 2{,}5 = \underline{1250 \text{ m}}$

La longueur du parcours $P = AB + BC + CD + DE$

$= 300 + 500 + 1250 + 750$

$= 2800$ m

La longueur est de 2800 m ou 2,8 km.