Chapitre 9 : Probabilités

I Défintions

A Expérience aléatoire

Définition 1. **Une expérience aléatoire** est une expérience que l'on peut **reproduire dans les mêmes conditions** et dont on connaît **tous les résultats possibles sans pouvoir déterminer de manière certaine lequel va se produire**.
Ces résultats possibles sont appelés des **issues**.

Exemple 1. On lance une pièce de 2 (équilibrée) et on regarde le côté supérieur obtenu. S'agit-il d'une expérience aléatoire ? Si oui, quelles sont les issues ?

Solution : Lorsqu'on lance la pièce, on ne peut pas prévoir à l'avance quel côté on va obtenir et on peut répéter l'opération. C'est donc une expérience aléatoire.
Cette expérience aléatoire admet **deux issues** : « obtenir pile » et « obtenir face »

B Évènements

Définition 2. Un événement est une condition qui peut être, ou ne pas être, réalisée lors dune expérience : un **évènement** est constitué de zéro, une ou plusieurs issues.

- Lorsque l'évènement n'est réalisé par **aucune issue** (c'est-à-dire l'évènement ne peut pas se réaliser), on dit que c'est un évènement impossible .
- Lorsque l'évènement est réalisé par **une seule issue** , on dit que c'est un évènement élémentaire .
- Lorsque l'évènement est réalisé par **toutes les issues** (c'est-à-dire l'évènement se réalise toujours), on dit que c'est un l'évènement certain .

Remarque. Un évènement se note entre guillemets (c'est du français !).

Exemple 2. On réalise l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé à 6 faces équilibré (non pipé) et on regarde le nombre de points d'inscrit sur la face supérieure.

1. Quelles sont les issues de cette expérience aléatoire ?
2. Quelles issues réalisent l'évènement P : « obtenir un nombre pair » ?
3. Citer un évènement impossible
4. Citer un évènement certain
5. Citer un évènement élémentaire
6. L'évènement S « obtenir un nombre impair supérieur ou égal à 4 » est-il élémentaire ?

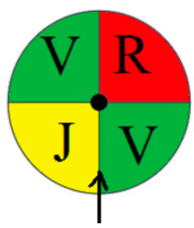
Solution :

1. Cette expérience aléatoire admet 6 issues : « obtenir 1 », « obtenir 2 », « obtenir 3 », « obtenir 4 », « obtenir 5 », « obtenir 6 »
2. L'évènement est réalisé par les issues « obtenir 2 », « obtenir 4 », « obtenir 6 »
3. L'évènement Z : « obtenir un zéro » est un évènement impossible, il n'est réalisé par aucune issue.
4. L'évènement N obtenir un nombre entier compris entre 1 et 6 » est un évènement certain, il est réalisé par toutes les issues
5. L'évènement « obtenir le nombre 3 » est un évènement élémentaire
6. l'évènement S est élémentaire car il est réalisé par une seule issue « obtenir un 5 »

Définition 3.

- L'évènement contraire d'un évènement A, noté « non A » ou $\overline{A}$ est l'évènement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas
- Deux évènements incompatibles sont deux évènements qui ne peuvent se réaliser en même temps

Exemple 3.
On réalise l'expérience aléatoire suivante : on fait tourner une roue de loterie équilibrée, on attend qu'elle s'arrête et on regarde la couleur désignée par la flèche. Si la flèche est entre deux couleurs, on considère que l'expérience est faussée et on renouvelle l'expérience.



1. Quelles sont les issues de cette expérience aléatoire ?
2. Quel est l'évènement contraire à l'évènement R « obtenir rouge »
3. Citer deux évènements incompatibles

Solution :

— Cette expérience a trois issues : « obtenir vert », « obtenir jaune » et « obtenir rouge »
— L'évènement contraire de R « obtenir un rouge » est non R « ne pas obtenir rouge », donc non R ou $\overline{R}$ « obtenir jaune ou vert »
— Les évènements « obtenir rouge » et « obtenir jaune » sont des évènements incompatibles, on ne peut pas avoir deux couleurs en même temps

II Une première approche : mesurer la chance

Exemple 4.

1. Si une personne lance une pièce de monnaie, quelle chance a-t-elle d'obtenir « pile » ?
2. Si une personne lance un dé à 6 faces, quelle chance a-t-elle d'obtenir la face « 3 » ?
3. Cents billets d'une loterie sont mis dans une boîte. Un billet est marqué 200, dix billets sont marqués 5 et les autres « perdus ». Lucie tire un billet au hasard dans cette boîte. Quelle chance a-t-elle de gagner 200 ? 5 ? De perdre ?

4. Dans une boîte de bonbons numéroté 1, il y a 10 bonbons à la fraise et 10 au citron. Dans une seconde boîte numérotée 2, il y a 6 bonbons à la fraise, 2 à la menthe et 4 à l'orange. Dans quelle boîte ai-je le plus de chance d'obtenir un bonbon à la fraise ?

Solution :

1. Cette personne a une chance sur deux d'obtenir pile : $\frac{1}{2}$
2. Cette personne a une chance sur 6 d'obtenir la face 3, soit $\frac{1}{6}$
3. Lucie a
   — une chance sur 100 d'obtenir 200, donc $\frac{1}{200}$
   — dix chances sur 100 d'obtenir 5, $\frac{10}{100}$
   — 89 chances sur 100 de perdre $\frac{89}{100}$
4. dans la boîte 1, 10 bonbons à la fraise, donc $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, soit une chance sur deux
   dans la boîte 2, il y a 6 bonbons sur 12 à la fraise, doit $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, une chance sur deux
   J'ai donc la même chance d'obtenir un bonbon à la fraise dans les deux boîtes

III De la fréquence à la probabilité

Définition 4. Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire dans les mêmes conditions, la fréquence à laquelle se réalise un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée la probabilité de cet événement .

Définition 5. La probabilite d'un événement A représente la « proportion de chances » que l'evénement se réalise lors d'une expérience aléatoire. **Cette probabilité se note p(A)** .

Exemple 5. Chaque élève lance 100 fois un dé à six faces et note les effectifs d'apparition de chaque face. On regroupe les résultats dans le tableau suivant :

Face	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Total**
Effectif	486	507	539	500	483	485	3000
Fréquence	16,20%	16,90%	17,97%	16,67%	16,10%	16,17%	100,00%

Les fréquences d'apparitions sont très proches les unes des autres. Théoriquement, il y a autant de chance d'obtenir un 1, un 2 , un .....ou un 6. En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les frequences se rapprocheraient les unes des autres de facon encore plus evidente.

IV Calcul de probabilités

A Propriétés

Propriété 1.
Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1 (fraction, nombre décimal ou pourcentage)
La probabilité de l'événement impossible est égale à 0
La probabilité de l'événement certain est égale à 1
La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.

Exemple 6. On lance une pièce de monnaie non truquée, on note F l'évènement « obtenir Face ». Calculer $p(F)$, donner le résultat sous forme fractionnaire, décimale et en %

Solution : $p(F) = \frac{1}{2}$ ou $p(F) = 0.5$ ou $p(F) = 50\%$

B Calculs

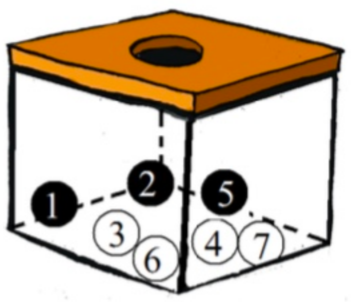
Définition 6. Dans une expérience aléatoire, lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité , on dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité .

Exemple 7. Dé cubique, chaque événement élémentaire a une chance sur 6 de sortir :
$p(\text{´ 1 ˇ}) = p(\text{´ 2 ˇ}) = p(\text{´ 3 ˇ}) = p(\text{´ 4 ˇ}) = p(\text{´ 5 ˇ}) = p(\text{´ 6 ˇ}) = \frac{1}{6}$, c'est donc une situation déquiprobabilité

Propriété 2. *(Laplace)*
Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement est égale au quotient

$$p(A) = \frac{\textit{Nombre d'issues favorables à l'événement } A}{\textit{Nombre d'issues possibles}}$$

Exemple 8.



On dispose de l'urne représentée ci-contre et contenant des boules indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité de l'événement N : « obtenir une boule noire » ?

Solution : Chaque boule a la même probabilité d'être tirée, il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
Nombre de boules noires : 3 - Nombre de boules au total : 7 donc $p(N) = \frac{3}{7}$

Propriété 3. *Événement contraire*
Soit A un événement, la probabilité d'un événement « non A » ou $\bar{A}$ est $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Exemple 9. La piscine organise des cours de natation par âge et niveau

	15 ans	16 ans	Total
Loisirs	12		19
Compétition	10	11	
Total			

1. Compléter le tableau ci-contre
2. On considère les événements suivants : « l'élève a 16 ans », « l'élève a 15 ans et fait de la compétition.
   Calculer la probabilité de chaque événement et de leurs évènements contraires. Donner la réponse sous forme d'une fraction irréductible.

Solution : Il y a 18 élèves qui ont 16 ans, donc $p(A) = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$ et $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \frac{11}{20}$

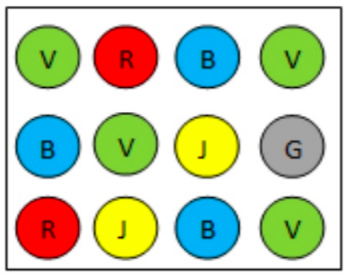
Il y a 10 élèves sur 40 qui ont 15 ans et font de la compétition, donc $p(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ et $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = \frac{3}{4}$

C Représenter une situation à l'aide d'un arbre de probabilité

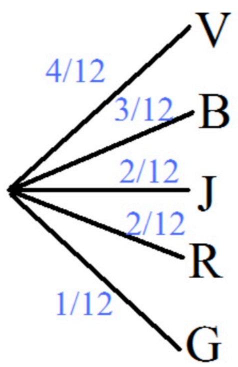
Un arbre est un moyen pratique qui permet de représenter les différentes issues d'une expérience aléatoire et de pondérer avec les probabilités.
Dans ce cas, la somme des probabilités figurant sur les branches est égale à 1.

Exemple 10.

On tire au hasard un boule dans l'urne ci-contre, composée de 4 boules vertes, 3 bleues, 2 jaunes, 2 rouges et une grise. Les boules sont indiscernables au toucher. Représenter la situation par un arbre de probabilité.



Solution :

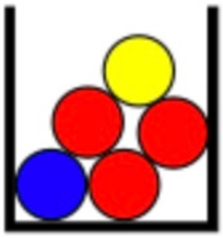


$$\frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = 1$$

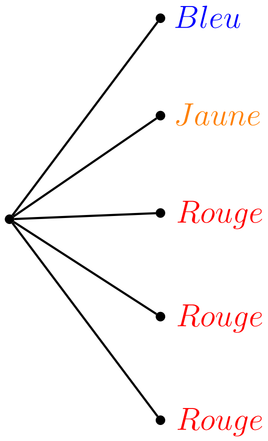
D Représentations

E Arbre des possibles

On représente les issues possibles sur un arbre. Par exemple,

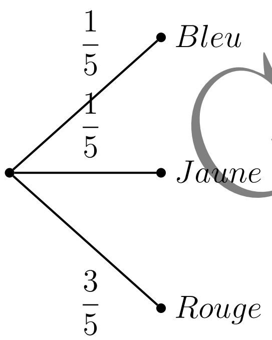


On tire au hasard une boule dans une urne composée de trois boules rouges, une boule jaune et une boule bleue.



E.1 Représentation sous forme d'arbre pondéré

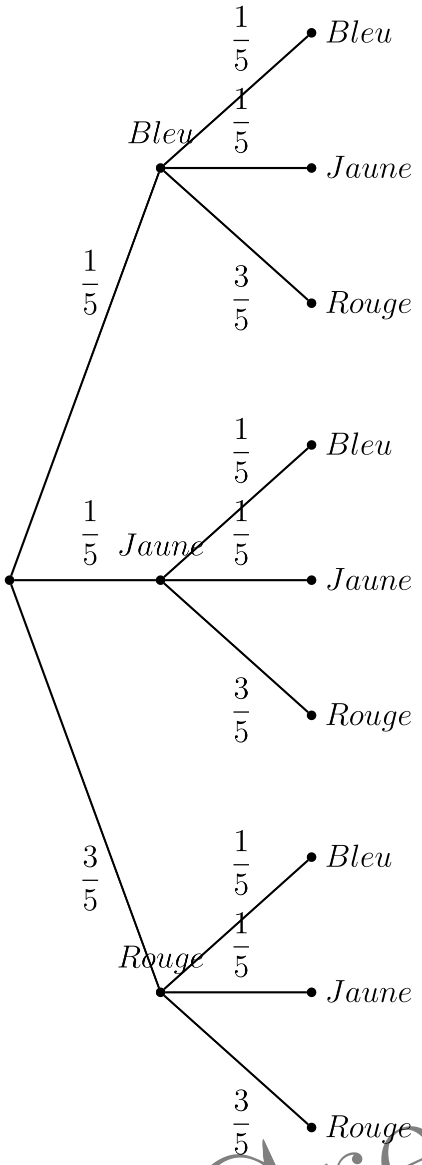
Dans un urne, il y a 5 boules indiscernables au toucher, une jaune, une bleue et 3 rouge.
On tire une boule au hasard et on regarde sa couleur. Quelles sont les issues ? Le nombre total de cas ?
3 cas / 5 boules, arbre :



On vérifie que $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = 1$

On tire une boule, on relève la couleur de la boule tirée, puis on remet cette boule dans l'urne. On effectue alors un second tirage et on note à nouveau la couleur de la boule tirée.

Dans un arbre de probabilités, la probabilité de l'événement auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long de cette branche.



On peut calculer la probabilité d'avoir « J-J »
$p = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}5$
« probabilité d'avoir « une jaune et une rouge »
$p = \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{25}$